Bernardo Aceituno Cabezas

12-10764

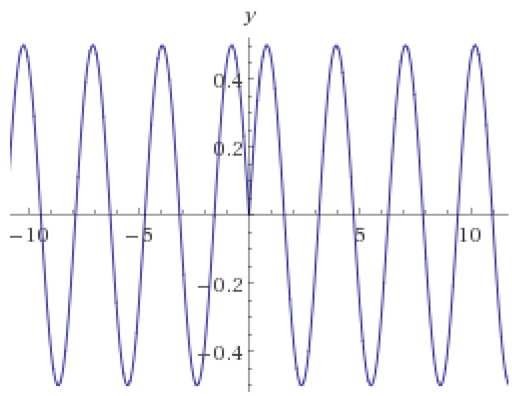
Problema de semana 3 (1er Quiz)

1. Considere la función x(t)=sen(2t)u(t). Se desea que determine
   1) Sus funciones pares e impares E{x(t)} y O{x(t)} e indique si son periódicas o no. Para las periódicas indique su período fundamental. Grafique cada una.
   2) Calcule las energías y potencias infinitas de cada una de ellas, i.e., E_{inf}(E{x(t)}), P_{inf}(E{x(t)}), E_{inf}(O{x(t)}), P_{inf}(O{x(t)})

1) Tenemos para cada parte que están dadas por

   a) $E\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] = \boxed{\frac{1}{2}[\sin(2t)\,u(t) - \sin(2t)\,u(-t)]}$

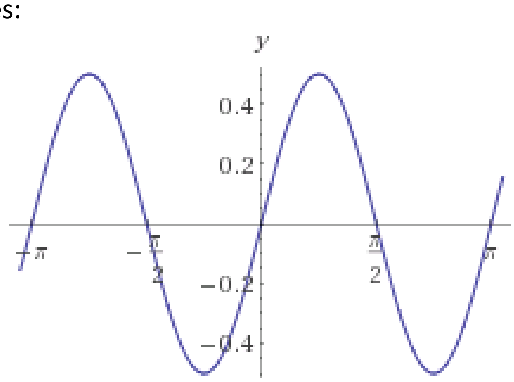
   Que gráficamente es:



   Inmediatamente notamos que no es periódica por su comportamiento alrededor de t = 0.

   b) $O\{X(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] = \frac{1}{2}[\sin(2t)\,u(t) + \sin(2t)\,u(-t)] = \boxed{\frac{1}{2}\sin(2t)}$

   Que gráficamente es:



   Al ser la función seno pero con valor máximo 0.5, el periodo fundamental está dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \boxed{\pi}$$

2) Para cada función tenemos:

a) La energía infinita de la parte par está dada por:

$$E_\infty[E\{x(t)\}] = \int_{-\infty}^{\infty} |E\{x(t)\}|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |E\{x(t)\}|^2 dt$$

Si integramos

$$E_\infty[E\{x(t)\}] = \lim_{T\to\infty} \frac{T}{4} = \boxed{\infty}$$

Ahora, la potencia infinita está dada por:

$$P_\infty[E\{x(t)\}] = \lim_{T\to\infty} \frac{\int_{-T}^{T} |E\{x(t)\}|^2 dt}{T-(-T)} = \lim_{T\to\infty} \frac{\int_{-T}^{T} |E\{x(t)\}|^2 dt}{2T}$$

Si recordamos el resultado anterior:

$$P_\infty[E\{x(t)\}] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\frac{T}{4} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

b) La energía infinita de la parte impar está dada por:

$$E_\infty[O\{x(t)\}] = \int_{-\infty}^{\infty} |O\{x(t)\}|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |O\{x(t)\}|^2 dt$$

Si integramos de nuevo:

$$E_\infty[O\{x(t)\}] = \lim_{T\to\infty} \frac{T}{4} = \boxed{\infty}$$

Y su potencia infinita está dada por:

$$P_\infty[O\{x(t)\}] = \lim_{T\to\infty} \frac{\int_{-T}^{T} |O\{x(t)\}|^2 dt}{T-(-T)} = \lim_{T\to\infty} \frac{\int_{-T}^{T} |O\{x(t)\}|^2 dt}{2T}$$

Y repitiendo le realizado en la parte (a):

$$P_\infty[O\{x(t)\}] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\frac{T}{4} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

2. Considere el sistema: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)} x(\tau-1)\, d\tau$. Determine:
(a) la respuesta al impulso x(t)=δ(t) del sistema
(b) sabiendo que el sistema es LTI, calcule la respuesta a x(t)=u(t)-u(t-1)

a) Tenemos que va a estar dada por:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)} \delta(\tau-1)\, d\tau$$

Si recordamos que debido a que el impulso solo es distinto a cero donde su argumento se anula, tendremos que:

$$\int_{-\infty}^{t} f(x)\delta(x-a)\, dx = f(a)u(t-a)$$

De allí:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)} \delta(\tau-1)\, d\tau = \boxed{e^{-2(t-1)}(t-1)}$$

b) Veremos que

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 1 \le t \\ 0, & 1 > t \end{cases}$$

Luego como el sistema es LTI, la salida y(t) a la entrada será:

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Es este caso:

$$h(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 1 \\ e^{-2(t-1)}, & \tau \ge 1 \end{cases}$$

y

$$x(t-\tau) = \begin{cases} 1, & t-1 \le \tau < t \\ 0, & t-1 > \tau \ge t \end{cases}$$

Luego dividimos en varios casos:

t<1

aquí veremos que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (0)x(t-\tau)d\tau = 0$$

1≤t<2

En este caso se cumple que

$$y(t) = \int_{1}^{t} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{1}^{t} h(\tau)d\tau = \int_{1}^{\tau} e^{-2(\tau-1)}\, d\tau = \left(\frac{e^{-2(\tau-1)}}{2}\right|_{t}^{1} = \frac{1-e^{-2(t-1)}}{2}$$

t≥2

este es el último caso, a partir de aquí la integral no varía, se cumple que

$$y(t)=\int_{t-1}^{t}h(\tau)x(t-\tau)d\tau=\int_{t-1}^{t}h(\tau)d\tau=\int_{t-1}^{\tau}e^{-2(\tau-1)}\,d\tau$$
$$=\left(\frac{e^{-2(\tau-1)}}{2}\right|\begin{matrix}t-1\\t\end{matrix}=\frac{e^{-2(t-2)}-e^{-2(t-1)}}{2}$$

Finalmente la respuesta a $x(t)$será:

$$\boxed{y(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<1\\ \dfrac{1-e^{-2(t-1)}}{2} & , \quad 1\le t<2\\ \dfrac{e^{-2(t-2)}-e^{-2(t-1)}}{2}, & \quad t\ge 2\end{cases}}$$